Αλγεβρικές Δομές Ι (2017-2018)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #1

1. Θεωρούμε το σύνολο $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ των μη μηδενικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε την πράξη $* : S \times S \to S$ στο S ως εξής
$$a * b = |a|b.$$
   (α′) Να δειχθεί ότι η πράξη $*$ είναι καλά ορισμένη και προσεταιριστική.
   (β′) Να δειχθεί ότι υπάρχει $e \in S$ ώστε $e * b = b$ για κάθε $b \in S$. Επίσης να δειχθεί ότι αν $a \in S$ τότε υπάρχει $b \in S$ με $a * b = e$.
   (γ′) Έχει η S ουδέτερο στοιχείο; Είναι η S ομάδα;

2. Να δειχθεί ότι το ανοικτό διάστημα $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$ αποτελεί αβελιανή ομάδα με πράξη
$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

3. Έστω $(G, *)$ μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e. Αν το σύνολο G είναι πεπερασμένο με άρτιο πλήθος στοιχείων να δειχθεί ότι υπάρχει στοιχείο $a \in G$ με $a \neq e$ τέτοιο ώστε $a * a = e$.

4. Έστω $(G, *)$ μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e. Αν ισχύει
$$x * x = e$$
για κάθε $x \in G$ δείξτε ότι η ομάδα G είναι αβελιανή.

5. Έστω $(G, *)$ μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e και $a, b, c \in G$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
   (α′) $a * b * c = e$
   (β′) $b * c * a = e$
   (γ′) $c * a * b = e$

6. Έστω $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Στο σύνολο $\mathbb{C}$ ορίζουμε δύο πράξεις $+, \cdot$ ως εξής:
$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$
$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1).$$
   (α′) Δείξτε ότι τα ζεύγη $(\mathbb{C}, +)$ και $(\mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}, \cdot)$ είναι αβελιανές ομάδες, και ότι η πράξη $\cdot$ είναι επιμεριστική επί της πράξης $+$.
   (β′) Θέτουμε $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$ και αν $a \in \mathbb{R}$ θέτουμε $\widetilde{a} = (a, 0) \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι αν $z \in \mathbb{C}$ τότε υπάρχουν μοναδικά $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $z = \widetilde{a} + \widetilde{b} \cdot i$. Επιπλέον δείξτε ότι $i \cdot i = \widetilde{(-1)}$.

Αλγεβρικές Δομές I (2017-2018)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #2

1. Για κάθε μια από τις παρακάτω ομάδες να βρεθούν τουλάχιστον δύο μη-τετριμμένες γνήσιες υποομάδες

$$(\mathbb{Z},+), \qquad (\mathbb{Q},+), \qquad (S_3,\circ), \qquad (8\mathbb{Z},+), \qquad (\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\cdot).$$

2. Να προσδιορισθεί η κυκλική υποομάδα $< A >$ της γενικής γραμμικής ομάδας $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ η οποία παράγεται από τον πίνακα A, όπου A είναι ένας εκ των πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Δείξτε ότι αν H και K είναι δύο υποομάδες μιας αβελιανής ομάδας $(G,*)$, τότε το υποσύνολο

$$H * K = \{h * k : h \in H, k \in K\}$$

είναι υποομάδα της G. Επίσης να αποδείξετε με την βοήθεια αντιπαραδείγματος ότι ο ισχυρισμός δεν αληθεύει όταν η ομάδα G δεν είναι αβελιανή.

4. (α′) Αν H, K είναι υποομάδες μιας ομάδας G δείξτε ότι η ένωση $H \cup K$ είναι υποομάδα αν και μόνο αν είτε $H \subseteq K$ είτε $K \subseteq H$.

   (β′) Δείξτε ότι δεν υπάρχει ομάδα που να είναι ένωση δύο γνησίων υποομάδων της.

   (γ′) Δείξτε ότι η ομάδα $(U(\mathbb{Z}_8),\cdot)$ είναι ένωση τριών γνησίων υποομάδων της.

5. (α′) Συμβολίζουμε με T το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με μέτρο ίσο με 1, δηλαδή

$$\mathrm{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

   Να δειχθεί ότι το T αποτελεί υποομάδα του $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.

   (β′) Συμβολίζουμε με U το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z με την ιδιότητα να υπάρχει θετικός ακέραιος n ώστε $z^n = 1$. Δείξτε ότι το U είναι υποομάδα της $(\mathrm{T},\cdot)$.

   (γ′) Έστω m θετικός ακέραιος. Θέτουμε

$$\mathrm{U}_m = \{z \in \mathbb{C} : z^m = 1\}.$$

   Η U_m ονομάζεται ομάδα των m-στων ριζών της μονάδος στο $\mathbb{C}$. Δείξτε ότι η U_m είναι υποομάδα της $(\mathrm{U},\cdot)$.

   (δ′) Δείξτε ότι $U = \cup_{m=1}^{\infty} \mathrm{U}_m$. Επιπλέον, δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο m η ομάδα U_m είναι κυκλική και ότι η ομάδα U δεν είναι κυκλική.

6. Έστω n, m δύο θετικοί ακέραιοι, και

$$H_1 = n\mathbb{Z} = < n >, \qquad H_2 = m\mathbb{Z} = < m >$$

οι κυκλικές υποομάδες της ομάδας $(\mathbb{Z}, +)$ οι οποίες παράγονται από τους φυσικούς αριθμούς n, m αντίστοιχα. Να προσδιορισθεί η ομάδα $H_1 \cap H_2$.

7. Έστω G πεπερασμένη κυκλική ομάδα με ταξη $|G| \geq 3$. Δείξτε ότι το πλήθος των γεννητόρων της G είναι άρτιο.

8. Έστω ότι $(G, *)$ είναι μια ομάδα και $a, b, x \in G$. Δείξτε ότι

$$\mathrm{ord}(x^{-1} * a * x) = \mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(x * a * x^{-1}), \qquad \mathrm{ord}(a * b) = \mathrm{ord}(b * a).$$

Επίσης δείξτε ότι $\mathrm{ord}(a^{-1}) = \mathrm{ord}(a)$.

9. Έστω ότι $(G, *)$ είναι μια ομάδα, H μια υποομάδα της G και $x \in G$. Θέτουμε

$$xHx^{-1} = \{xhx^{-1} : h \in H\}.$$

Δείξτε ότι η xHx^{-1} είναι υποομάδα της G και ότι $\#\,(xHx^{-1}) = \#H$.

10. Να ευρεθεί η τάξη του στοιχείου a της ομάδος $(G, *)$, όπου

$a = [2]_3,\ (G, *) = (\mathbb{Z}_3, +)$, $\quad a = [6]_{10},\ (G, *) = (\mathbb{Z}_{10}, +)$,
$a = i,\ (G, *) = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\quad a = -i,\ (G, *) = (\mathbb{C}^*, \cdot)$,
$a = -1 + i\sqrt{3},\ (G, *) = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\quad a = (-1 + i\sqrt{3})/2,\ (G, *) = (\mathbb{C}^*, \cdot)$.

11. Να ευρεθεί η τάξη όλων των στοιχείων της ομάδος $G = (U(\mathbb{Z}_{14}), \cdot)$ των αντιστρεψίμων ακεραίων modulo 14. Είναι η ομάδα G κυκλική;

12. Βρείτε το πλήθος των γεννητόρων μιας κυκλικής ομάδας με τάξη n, όταν $n = 5$, $n = 8$, $n = 12$, $n = 60$.

13. Βρείτε όλους τους γεννήτορες της ομάδος $\mathrm{U_m}$ των m-στων ριζών της μονάδας στο $\mathbb{C}$ όταν $m = 4$, $m = 17$, $m = 24$, $m = 31$.

14. Βρείτε όλους τους γεννήτορες των ομάδων $(\mathbb{Z}_{10}, +)$, $(\mathbb{Z}_{12}, +)$, $(\mathbb{Z}_{15}, +)$.

15. Ποιές είναι οι δυνατές τάξεις για τις υποομάδες των επόμενων κυκλικών ομάδων

$$(\mathbb{Z}, +), \quad (\mathbb{Z}_6, +), \quad (\mathbb{Z}_8, +), \quad (\mathbb{Z}_{12}, +), \quad (\mathbb{Z}_{60}, +), \quad (\mathbb{Z}_{17}, +)\ ;$$

16. Δείξτε ότι μια ομάδα G έχει πεπερασμένο πλήθος υποομάδων αν και μόνο αν η ομάδα G είναι πεπερασμένη.

17. Να δειχθεί ότι μια ομάδα G έχει ακριβώς δύο υποομάδες αν και μόνο αν η G είναι κυκλική τάξης p, όπου p πρώτος.

18. Έστω ότι η G είναι κυκλική ομάδα τάξης n. Έστω m ένας θετικός διαιρέτης του n. Δείξτε ότι η G έχει ακριβώς $\phi(m)$ στοιχεία τάξης m, όπου ϕ είναι η συνάρτηση ϕ του Euler.

Αλγεβρικές Δομές Ι (2017-2018)
Φροντιστηριακές ασκήσεις #3

1. Να βρεθούν οι αριστερές πλευρικές κλάσεις της υποομάδας H στην ομάδα G όταν:
$$H =< 5 >= 5\mathbb{Z}, G = \mathbb{Z}, \qquad\qquad H =< 9 >= 9\mathbb{Z}, G = \mathbb{Z}$$

2. Να βρεθούν οι αριστερές πλευρικές κλάσεις της υποομάδας $< [6]_{12} >$ στην ομάδα $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ και της $< [6]_{12} >$ στην (υπο)ομάδα $< [2]_{12} >$ της $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.

3. Θεωρούμε τις ακόλουθες (κυκλικές) υποομάδες της S_3
$$H = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad K = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$
Να βρεθούν οι δεξιές και αριστερές πλευρικές κλάσεις (δεξιά και αριστερά σύμπλοκα) των υποομάδων $H,\ K$ στην S_3.

4. Θεωρούμε την διεδρική ομάδα D_4 τάξης 8. Για κάθε στοιχείο $a \in \mathrm{D}_4$ να υπολογίσετε την τάξη της κυκλικής ομάδος $< a >$ που παράγετε από το a και τις δεξιές πλευρικές κλάσεις της υποομάδας $< a >$ στην D_4.

5. Θεωρούμε την ομάδα $(\mathbb{Z}_{12}, +)$, και την ομάδα ευθύ γινόμενο $G = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}$. Έστω H το ακόλουθο υποσύνολο της G:
$$H = \{\ \ ([a]_{12}, [b]_{12}) \in G\ :\ 3 \mid a,\ \ 3 \mid b\ \ \}.$$
Δείξτε ότι το σύνολο H είναι υποομάδα της G και υπολογίστε τον δείκτη $[G : H]$.

6. Έστω ότι $(G, *)$ είναι μια ομάδα και ότι $H \leq G$ είναι μια υποομάδα της Να δειχθεί ότι το πλήθος των αριστερών συμπλόκων (πλευρικών κλάσεων) της H στην G ισούται με το πλήθος των δεξιών συμπλόκων (πλευρικών κλάσεων) της H στην G.

7. Έστω ότι $(G, *)$ είναι μια ομάδα, H, K δύο υποομάδες της G και $a, b \in G$. Αν $a * H = b * K$ δείξτε ότι $H = K$.

8. Βρείτε τον δείκτη $[G : H]$ της υποομάδας $H \leq G$ όταν $H = n\mathbb{Z}$ και $G = \mathbb{Z}$.

9. Βρείτε τον δείκτη $[G : H]$ της υποομάδας $H \leq G$ όταν $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ και
$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y\}.$$

10. Έστω ότι $(G, *)$ είναι πεπερασμένη ομάδα, και H, K δύο υποομάδες της G.

    (α′) Υποθέτουμε ότι η τάξη της H είναι πρώτος αριθμός p που δεν διαιρεί την τάξη της K. Δείξτε ότι $H \cap K = \{e\}$.

    (β′) Υποθέτουμε ότι οι ομάδες H, K έχουν τάξη τον ίδιο πρώτο αριθμό p και $H \neq K$. Δείξτε ότι $H \cap K = \{e\}$.

11. Βρείτε υποομάδα H της πολλαπλασιαστικής ομάδας $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ έτσι ώστε $[\mathbb{R}^* : H] = 2$.

12. Έστω G ομάδα με τάξη $\#G < 300$ η οποία έχει δύο υποομάδες H, K με τάξεις $\#H = 24$ και $\#K = 54$. Βρείτε την τάξη της G.

13. Έστω $(G, *)$ ομάδα και $a, b \in G$ στοιχεία πεπερασμένης τάξης με την ιδιότητα $a * b = b * a$. Υποθέτουμε ότι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των $\mathrm{ord}(a)$ και $\mathrm{ord}(b)$ είναι 1. Δείξτε ότι
$$\mathrm{ord}(a * b) = \mathrm{ord}(a) \cdot \mathrm{ord}(b).$$

14. Έστω G πεπερασμένη αβελιανή ομάδα. Θέτουμε
$$M = \{ \text{ ord(a) : a} \in \text{G } \}.$$
    Έστω m το μέγιστο στοιχείο του M. Δείξτε ότι $a^m = e_G$ για κάθε $a \in G$. Επιπλέον, δείξτε ότι το αποτέλεσμα δεν ισχύει αν $G = \mathrm{S}_3$.

15. Έστω ότι p, q είναι πρώτοι αριθμοί, και $(G, *)$ μια ομάδα. Να δειχθεί ότι:

    (α′) Αν η τάξη της G είναι pq, τότε κάθε γνήσια υποομάδα H της G είναι κυκλική.

    (β′) Αν η G είναι αβελιανή με τάξη pq και $p \neq q$, τότε η G είναι κυκλική.

    (γ′) Υπάρχουν αβελιανές ομάδες τάξης p^2 που δεν είναι κυκλικές.

16. Έστω G μια (όχι απαραίτητα πεπερασμένη) ομάδα και H, K δύο υποομάδες της G με $K \leq H$. Αν ο δείκτης $[G : K]$ είναι πεπερασμένος, τότε να δειχθεί ότι οι δείκτες $[G : H]$ και $[H : K]$ είναι πεπερασμένοι και ισχύει ότι
$$[G : K] = [G : H] \cdot [H : K]$$

17. Έστω G μια (όχι απαραίτητα πεπερασμένη) ομάδα και H, K δύο υποομάδες της G, των οποίων ο δείκτης στην G είναι πεπερασμένος. Δείξτε ότι ο δείκτης της υποομάδας $H \cap K$ είναι επίσης πεπερασμένος. Επιπλέον δείξτε ότι αν ο Μεγιστος Κοινός Διαιρέτης των αριθμών $[G : H]$ και $[G : K]$ είναι 1 τότε
$$[G : H \cap K] = q$$
    όπου q συμβολίζει το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των αριθμών $[G : H]$ και $[G : K]$.

Αλγεβρικές Δομές Ι (2017-2018)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #4

1. Σε κάθε μια από τις επόμενες περιπτώσεις να εξεταστεί αν η απεικόνιση που ορίζεται είναι ομομορφισμός ομάδων και αν είναι να υπολογιστεί ο πυρήνας της:

   (1) $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ \ \phi(k) = k - 1.$

   (2) $\phi : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot),\ \ \phi(a) = |a|.$

   (3) $\phi : \mathrm{S}_3 \to \mathrm{S}_3,\ \ \phi(a) = a^{-1}.$

   (4) $\phi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2,\ \ \phi([a]_6) = [a]_2.$

2. Έστω G ομάδα. Να δειχθεί ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

   (1) Η G είναι αβελιανή.

   (2) Η απεικόνιση $f : G \to G,\ f(a) = a^{-1}$ είναι ομομορφισμός.

   (3) Η απεικόνιση $h : G \to G,\ h(a) = a^2$ είναι ομομορφισμός.

   (4) Η απεικόνιση $r : G \times G \to G,\ r(a, b) = ab$ είναι ομομορφισμός.

3. (1) Δείξτε ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(a) = 2a$ είναι μονομορφισμός που δεν είναι επί.

   (2) Δείξτε ότι η απεικόνιση $h : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*,\ h(a) = a^2$ είναι επιμορφισμός που δεν είναι ένα προς ένα.

4. Δώστε παράδειγμα μη-τετριμμένου ομομορφισμού ή δικαιολογήστε γιατί δεν υπάρχει μη-τετριμμένος ομομορφισμός $f : G \to H$ όταν

$$
\begin{array}{ccc}
f : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_5, & f : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_4, & f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}, \\
f : \mathbb{Z}_3 \to \mathrm{S}_3, & f : \mathbb{Z} \to \mathrm{S}_3, & f : \mathrm{S}_3 \to \mathrm{S}_4
\end{array}
$$

5. (1) Υπολογίστε το σύνολο των ομομορφισμών $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

   (2) Υπολογίστε το σύνολο των ομομορφισμών $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$.

   (3) Υπολογίστε το σύνολο των ομομορφισμών $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}$.

   (4) Υπολογίστε το σύνολο των ομομορφισμών $\mathbb{Z}_{25} \to \mathbb{Z}_{15}$.

   (5) Υπολογίστε το σύνολο των ομομορφισμών $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$.

   (6) Υπολογίστε το σύνολο των ομομορφισμών $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$.

6. Έστω ότι G είναι μια άπειρη ομάδα. Δείξτε ότι η G είναι κυκλική αν και μόνο αν κάθε υποομάδα $H \neq \{e\}$ της G ειναι ισόμορφη με την G.

Αλγεβρικές Δομές Ι (2017-2018)
Φροντιστηριακές ασκήσεις #5

1. Βρείτε όλες τις υποομάδες των παρακάτω ομάδων και σχεδιάστε το διάγραμμα Hasse των υποομάδων της.

   (1) $\mathbb{Z}_3$, (2) $\mathbb{Z}_9$, (3) $\mathbb{Z}_{27}$, (4) $\mathbb{Z}_{15}$, (5) $\mathbb{Z}_{45}$, (6) $\mathbb{Z}_{30}$, (7) $\mathbb{Z}_{36}$.

2. Θεωρούμε τα ακόλουθα στοιχεία της S_6:

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \mu=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

   (1) Να προσδιορισθούν οι τροχιές της χ στις οποίες διαμερίζεται το σύνολο $\{1,2,3,4,5,6\}$, όταν $\chi=\sigma,\tau$ και μ.

   (2) Να προσδιορισθεί η ανάλυση σε ξένους κύκλους των $\tau,\mu,\sigma,\sigma^2,\sigma^3,\sigma^4,\sigma^5,\sigma^6$.

   (3) Να προσδιορισθούν οι τάξεις $\mathrm{ord}(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\tau)$, και $\mathrm{ord}(\mu)$.

   (4) Να υπολογιστεί η μετάθεση σ^{2018}.

   (5) Να υπολογιστούν τα στοιχεία:

$$\sigma\circ\tau\circ\sigma^{-1}, \quad \sigma^{-1}\circ\tau\circ\sigma, \quad \tau\circ\sigma\circ\tau^{-1}, \quad \mu\circ\tau\circ\mu^{-1}.$$

   (6) Να επιλυθεί ως προς $x\in\mathrm{S}_6$ η εξίσωση: $x\circ\sigma\circ x^{-1}=(1,2,3,4,5,6)$.

   (7) Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει $x\in\mathrm{S}_6$ ώστε: $x\circ\sigma\circ x^{-1}=\tau$.

3. Να δειχθεί ότι το πρόσημο μιας μετάθεσης σ της $\mathrm{S_n}$ είναι ίσο με το πρόσημο της αντίστροφης μετάθεσης σ^{-1}.

4. Έστω ότι $\sigma,\tau\in\mathrm{S_n}, n\geq 2$. Να δειχθεί ότι:

   (1) Ισχύει $\sigma\circ\tau\circ\sigma^{-1}\circ\tau^{-1}\in\mathrm{A_n}$.

   (2) Ισχύει $\sigma\circ\tau\circ\sigma^{-1}\in\mathrm{A_n}$ αν και μόνο αν $\tau\in\mathrm{A_n}$.

5. Να δείξετε ότι κάθε στοιχείο $\sigma\in\mathrm{A_n}, n\geq 3$, μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο 3-κύκλων.

6. Να δείξετε ότι αν $n\geq 4$ η εναλλάσσουσα ομάδα $\mathrm{A_n}$ δεν είναι αβελιανή.

7. Να δείξετε ότι η εναλλάσσουσα ομάδα $\mathrm{A_4}$ έχει υποομάδες τάξεις $1,2,3,4$ και 12, αλλά δεν έχει υποομάδα τάξης 6.

8. Να βρεθεί το διάγραμμα Hasse της εναλλάσσουσας ομάδας $\mathrm{A_4}$.

Αλγεβρικές Δομές Ι (2017-2018)
Φροντιστηριακές ασκήσεις #6

1. Έστω G μια ομάδα και H μια πεπερασμένη υποομάδα της G με την ιδιότητα ότι η H είναι η μοναδική υποομάδα της G με τάξη $\#H$. Να δείξετε ότι η H είναι κανονική.

2. Έστω $(G, *)$ μια ομάδα και H μια κανονική υποομάδα της G. Έστω $a, b \in G$ με $a * b \in H$. Δείξτε ότι $b * a \in H$. Επίσης, βρείτε υποομάδα H της S_3 και $a, b \in S_3$ ώστε $a \circ b \in H$, ενώ $b \circ a \notin H$.

3. Έστω G ομάδα. Δείξτε ότι η τομή οποιουδήποτε πλήθους κανονικών υποομάδων της G είναι κανονική υποομάδα της G.

4. Έστω $f : G_1 \to G_2$ ένας ομομορφισμός ομάδων.

   (1) Αν H είναι μια κανονική υποομάδα της G_1, να δείξετε ότι η $f(H)$ είναι κανονική υποομάδα της ομάδας $f(G_1)$. Βρείτε παράδειγμα, όπου η υποομάδα $f(H)$ δεν είναι κανονική υποομάδα της ομάδας G_2.

   (2) Αν K είναι μια κανονική υποομάδα της G_2, να δείξετε ότι η $f^{-1}(K)$ είναι κανονική υποομάδα της ομάδας G_1.

5. Θεωρούμε την υποομάδα $\mathbb{Z}$ της προσθετικής ομάδας $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι είναι κανονική υποομάδα και να βρεθούν όλα τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης της ομάδας πηλίκο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

6. Θεωρούμε την υποομάδα T της ομάδας $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, όπου
$$\mathrm{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$
Δείξτε ότι η υποομάδα T είναι κανονική και ότι η ομάδα πηλίκο $\mathbb{C}^*/T$ είναι ισόμορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα των θετικών πραγματικών αριθμών.

7. Βρείτε τις τάξεις των ομάδων πηλίκο
$$\mathbb{Z}_6/(< [3]_6 >), \qquad \mathbb{Z}_{60}/(< [12]_{60} >), \qquad \mathbb{Z}_{60}/(< [39]_{60} >).$$

8. Βρείτε την τάξη του στοιχείου:

   (1) $[5]_{12} + H$ στην ομάδα πηλίκο $\mathbb{Z}_{12}/H$, όπου $H = < [4]_{12} >$.

   (2) $[26]_{60} + H$ στην ομάδα πηλίκο $\mathbb{Z}_{60}/H$, όπου $H = < [12]_{60} >$.

9. Να δειχθεί ότι υπάρχουν ισομορφισμοί ομάδων:

   (1) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/H$ με την ομάδα $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$, όπου $H = < (2, 2) >$.

   (2) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)/H$ με την ομάδα $\mathbb{Z}_2$, όπου $H = < ([0]_2, [1]_4) >$

   (3) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)/H$ με την ομάδα $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, όπου $H = < ([0]_2, [2]_4) >$.

Αλγεβρικές Δομές Ι (2017-2018)
Φροντιστηριακές ασκήσεις #7

1. Δείξτε ότι τα επόμενα σύνολα μαζί με τις αναφερόμενες πράξεις αποτελούν δακτυλίους:

    (1) $R = \{m/n \in \mathbb{Q} \mid m, n \in \mathbb{Z},\ n \text{ περιττός}\}$ μαζί με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού των ρητών αριθμών.

    (2) $R = \{m/2^k \in \mathbb{Q} \mid m, k \in \mathbb{Z}\}$ μαζί με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού των ρητών αριθμών.

    (3) $R = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ μαζί με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού των πραγματικών αριθμών.

    (4) $R = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{2}\sqrt{3} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$ μαζί με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού των πραγματικών αριθμών.

    (5) $R = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ όπου $i^2 = -1$, μαζί με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού των μιγαδικών αριθμών.

2. Να δειχθεί ότι το σύνολο μιγαδικών 2×2 πινάκων

$$\mathbb{H} = \{ \begin{pmatrix} a & c \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{C}\}$$

με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού πινάκων αποτελεί ένα δακτύλιο διαίρεσης. Ο δακτύλιος $\mathbb{H}$ καλείται ο δακτύλιος διαίρεσης των τετρανίων του Hamilton.

3. Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας δακτύλιος. Να δείξετε ότι το υποσύνολο

$$\mathrm{Z}(R) = \{r \in R \mid r \cdot x = x \cdot r,\ \ \forall x \in R\}$$

είναι ένας υποδακτύλιος του R. Ο υποδακτύλιος $\mathrm{Z}(R)$ καλείται κέντρο του δακτυλίου R. Για $n \geq 2$ βρείτε το κέντρο του δακτυλίου $\mathbb{R}^{n\times n}$ των $n \times n$ πραγματικών πινάκων.

4. Να προσδιοριστούν όλοι οι διαιρέτες του μηδενός των επόμενων δακτυλίων:

$$(1)\ \mathbb{Z}_4, \qquad (2)\ \mathbb{Z}_5, \qquad (3)\ \mathbb{Z}_6, \qquad (4)\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \qquad (5)\ \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

5. Να προσδιοριστούν τα αντιστρέψιμα στοιχεία των επόμενων δακτυλίων:

$$(1)\ \mathbb{Z}_{10}, \qquad (2)\ \mathbb{Z}_{11}, \qquad (3)\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \qquad (4)\ \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad (5)\ \mathbb{H}.$$

6. Έστω R πεπερασμένος δακτύλιος με μονάδα 1_R και τουλάχιστον δύο στοιχεία. Υποθέτουμε ότι αν $a, b \in R \setminus \{0\}$ τότε $a \cdot b \neq 0$. Δείξτε ότι ο R είναι δακτύλιος διαίρεσης.

7. Έστω R πεπερασμένη ακέραια περιοχή. Δείξτε ότι ο R είναι σώμα.

Αλγεβρικές Δομές Ι (2017-2018)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #8

1. Έστω R, S δακτύλιοι με μονάδα και έστω $f : R \to S$ ένας μη μηδενικός ομομορφισμός δακτυλίων. Να δείξετε ότι $f(1_R) = 1_S$, σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

   (1) Ο ομομορφισμός f είναι επιμορφισμός.

   (2) Ο δακτύλιος S δεν έχει διαιρέτες του μηδενός.

2. Έστω R, S δακτύλιοι με μονάδα και έστω $f : R \to S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων με την ιδιότητα $f(1_R) = 1_S$. Δείξτε ότι για κάθε αντιστρέψιμο στοιχείο $x \in R$ το στοιχείο $f(x) \in S$ είναι αντιστρέψιμο και ισχύει $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

3. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και $1_R \neq 0_R$. Δείξτε ότι ο R είναι σώμα αν και μόνο αν ο R έχει ακριβώς δύο ιδεώδη.

4. Έστω $f : R \to S$ ομομορφισμός μεταθετικών δακτύλιων με μονάδα με την ιδιότητα $f(1_R) = 1_S$.

   (1) Δείξτε ότι αν J ιδεώδες του S τότε το $f^{-1}(J)$ είναι ιδεώδες του R. Επιπλέον δείξτε ότι αν το J είναι πρώτο ιδεώδες του S τότε και το $f^{-1}(J)$ είναι πρώτο ιδεώδες του R.

   (2) Δείξτε ότι αν f επιμορφισμός και J μεγιστοτικό (maximal) ιδεώδες του S τότε το $f^{-1}(J)$ είναι μεγιστοτικό ιδεώδες του R.

   (3) Έστω $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ η ένθεση. Δείξτε ότι η f είναι μονομορφισμός δακτυλίων. Βρείτε μεγιστοτικό ιδεώδες J του δακτυλίου $\mathbb{Q}$ ώστε το $f^{-1}(J)$ να μην είναι μεγιστοτικό ιδεώδες του $\mathbb{Z}$. Επίσης δείξτε ότι αν $n \geq 2$ ακέραιος και $I = n\mathbb{Z}$, τότε το I είναι ιδεώδες του $\mathbb{Z}$, αλλά το $f(I)$ δεν είναι ιδεώδες του $\mathbb{Q}$.

5. Να βρεθεί, για $n \geq 2$, η χαρακτηριστική των δακτυλίων

$$\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{10}, \qquad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{15}, \qquad \mathbb{Z}_n[x], \qquad \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad (\mathbb{Z}_2)^{2\times 2}.$$

6. (1) Έστω S υποδακτύλιος του δακτυλίου των ακεραίων $\mathbb{Z}$. Δείξτε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ με $S = n\mathbb{Z}$. Άρα το S είναι ιδεώδες του $\mathbb{Z}$.

   (2) Βρείτε παράδειγμα υποδακτύλιου του δακτυλίου $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, ο οποίος να μην είναι ιδεώδες του $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

7. Έστω $n \geq 2$. Να βρεθούν όλα τα πρώτα και όλα τα μεγιστοτικά (maximal) ιδεώδη του δακτυλίου $\mathbb{Z}_n$.

8. Βρείτε όλα τα ιδεώδη I του δακτυλίου $\mathbb{Z}_{12}$. Για καθένα από αυτά να περιγράψετε τον δακτύλιο πηλίκο $\mathbb{Z}_{12}/I$, δηλαδή βρείτε γνωστό δακτύλιο με τον οποίο να είναι ισόμορφος ο δακτύλιος πηλίκο $\mathbb{Z}_{12}/I$.